Pythagoreïsche Drietallen en het Vermoeden van Fermat

Wim H. Hesselink, 18th July 2005

De inspiratie van Fermat was een tekst van Diophantus (zie [1] p. 218), die sterk gemoderniseerd op het volgende neerkomt:

"*Hoe 1 te schrijven als som van twee kwadraten van breuken?* We zoeken breuken (rationale getallen) x en y zo dat $x^2 + y^2 = 1$. Neem aan dat $x \neq 0$. Stel $m = (y + 1)/x$. Dan is m ook een breuk en er geldt $y = mx - 1$. De vergelijking geeft dan $1 = x^2 + y^2 = x^2 + (mx - 1)^2 = (m^2 + 1)x^2 - 2mx + 1$. Hieruit volgt $(m^2 + 1)x^2 = 2mx$. Wegens $x \neq 0$ volgt dat $x = 2m/(m^2 + 1)$ en $y = mx - 1 = (m^2 - 1)/(m^2 + 1)$.

Omgekeerd, neem een willekeurige breuk m. Dan zijn $x = 2m/(m^2 + 1)$ en $y = (m^2 - 1)/(m^2 + 1)$ breuken met $x^2 + y^2 = 1$ en $y \neq 1$. Voor $m = 0$ vinden we nog de oplossing $x = 0$ en $y = -1$. De enige oplossing die we zo niet tegenkomen is $x = 0$ en $y = 1$."

Al met al bewijst dit:

Stelling. (a) Beschouw een oplossing van $x^2 + y^2 = 1$ in rationale getallen x en y, waarvoor $y \neq 1$ is. Dan is er een rationaal getal m met $x = 2m/(m^2 + 1)$ en $y = (m^2 - 1)/(m^2 + 1)$.

(b) Laat m een rationaal getal zijn. Dan zijn $x = 2m/(m^2 + 1)$ en $y = (m^2 - 1)/(m^2 + 1)$ rationale getallen met $x^2 + y^2 = 1$ en $y \neq 1$.

Fermat schreef het volgende in de kantlijn van zijn vertaling: "Het is aan de andere kant niet mogelijk een derde macht op te delen in twee derde machten, of een vierde macht in twee vierde machten, of algemeen welke macht dan ook in twee machten met dezelfde exponent, behalve bij kwadraten. Ik heb een heel mooi bewijs hiervan gevonden, maar deze kantlijn is niet groot genoeg om dit te bevatten."

Omdat dit bewijs van Fermat nooit is opgedoken, en omdat men nooit een sluitend bewijs gevonden heeft dat Fermat had kunnen bedenken, spreekt men liever van het Vermoeden van Fermat. Het wordt ook wel de Laatste Stelling van Fermat genoemd, omdat alle andere beweringen van Fermat eerder (en veel gemakkelijker) bewezen zijn.

Als we een rationale oplossing van $x^2 + y^2 = 1$ hebben, kunnen we door de noemers weg te werken een gehele oplossing krijgen van $a^2 + b^2 = c^2$. Voorbeeld: neem $m = 2$, dan wordt $x = \frac{4}{5}$ en $y = \frac{3}{5}$. Wegwerken van de noemers uit $(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1$ geeft $4^2 + 3^2 = 5^2$. Men noemt een dergelijke drietal gehele getallen een *Pythagoreïsch drietal*.

Voor andere exponenten kan men hetzelfde doen. Vandaar dat het Vermoeden van Fermat tegenwoordig altijd uitgedrukt wordt met drietallen (a, b, c) van gehele getallen met $a^n + b^n = c^n$.

References

[1] J. Fauvel and J. Gray. *The history of mathematics –a reader–*. Macmillan Press, London, 1987.