

Tentamen Talen en Automaten, 22 januari 2010

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar. Als het tentamen is nagekeken, kun je het inzien bij Wim H. Hesselink, Bernoulliborg, kamer 374.

Opgave 1 (10 %). Beschouw een taal L over het alfabet Σ . Vul voor de puntjes (. . .) één van de volgende machinetypes in:

A: een lineair begrensde automaat (LBA),

B: een nondeterministische eindige automaat,

C: een Turingmachine die voor elke invoer eindigt,

D: een stapelautomaat,

E: een Turingmachine.

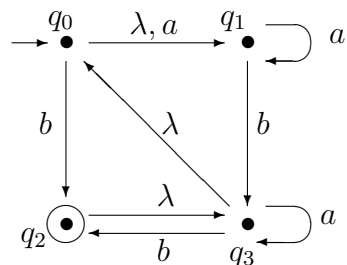
(a) L is contextvrij $\equiv L$ wordt geaccepteerd door . . .

(b) L is recursief opsombaar $\equiv L$ wordt geaccepteerd door . . .

(c) L is regulier $\equiv L$ wordt geaccepteerd door . . .

(d) L is recursief $\equiv L$ wordt geaccepteerd door . . .

Opgave 2 (12 %). Beschouw de NFA M gegeven door



Construeer volgens het standaardalgoritme het toestandsdiagram van de DFA equivalent met M .

Opgave 3 (16 %). (a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.

De taal L_3 over het alfabet $\{0, 1\}$ wordt gegeven door de grammatica:

$$S \rightarrow 00S0 \mid 1S11 \mid \lambda .$$

(b) Bewijs, dat als $w \in L_3$ tenminste één 1 bevat en een staartstuk 0^k heeft, dan heeft w een beginstuk 0^{2k} .

(c) Bewijs dat de taal L_3 niet regulier is.

Opgave 4 (10 %). Beschouw nogmaals de taal L_3 uit de vorige opgave. Construeer een stapelautomaat die de taal L_3 accepteert. Het is voldoende het toestandsdiagram te geven en duidelijk te maken waarom deze stapelautomaat de taal L_3 accepteert.

Opgave 5 (10 %). (a) Geef de definities van nuttige en nutteloze (*useful* and *useless*) symbolen voor een grammatica G .

(b) Gegeven is de grammatica G volgens

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aB \mid aE \mid bF \\ A &\rightarrow aA \mid a \\ B &\rightarrow dBd \mid C \mid bF \\ C &\rightarrow cC \mid \lambda \\ D &\rightarrow dAD \mid BF \\ E &\rightarrow E \mid bS \\ F &\rightarrow BD \mid AF . \end{aligned}$$

Construeer volgens het standaardalgoritme een hiermee equivalente grammatica zonder nutteloze (*useless*) symbolen.

Opgave 6 (10 %). De taal L_6 over een alfabet $\{a, b\}$ bestaat uit de strings $a^k b^n$ voor natuurlijke getallen k en n waarbij n een veelvoud is van k ; dus

$$L_6 = \{a^k b^n \mid \exists m : n = m \cdot k\} .$$

Construeer een Turingmachine die deze taal accepteert en op elke invoer eindigt. Je mag meer banden gebruiken en/of nondeterminisme. Beschrijf de werking van je Turingmachine, geef het toestandsdiagram en maak duidelijk waarom deze Turingmachine aan de gestelde eisen voldoet.

Opgave 7 (10 %). (a) Geef de definities van *recursieve* en *recursief opsombare* talen.

Het boek/diktaat beschrijft een manier om een Turingmachine M te coderen tot een string $R(M) \in \{0, 1\}^*$ en een universele Turingmachine die gebruikt kan worden om een aldus gecodeerde machine M te simuleren.

Beschouw nu de taal L_7 die bestaat uit de strings $R(M)1^n$ zodanig dat executie van Turingmachine M bij lege invoer (λ) termineert binnen n stappen.

(b) Is de taal L_7 recursief? Geef een argumentatie.

(c) Is de taal L_7 recursief opsombaar? Geef een argumentatie.

Opgave 8 (10 %). Gegeven zijn twee recursieve talen L_a en L_b over een alfabet Σ . Bewijs dat de doorsnede $L_a \cap L_b$ recursief is. Gebruik hiertoe Turingmachines en beschrijf hoe je daarmee het gestelde bewijst.

Opgave 9 (12 %). Gegeven een recursief opsombare taal L_9 . Beschouw de taal L'_9 van de beginstukken van L_9 volgens $L'_9 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* : wu \in L_9\}$. Bewijs dat L'_9 recursief opsombaar is.

Bonusopgave (10). Geef een recursieve taal L_{10} waarvoor de taal van de beginstukken $L'_{10} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* : wu \in L_{10}\}$ niet recursief is, met argumentatie.