

# Tentamen Talen en Automaten, 29 juni 2012

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen. Je mag desgewenst stellingen uit het diktaat en eerdere opgaven uit dit tentamen gebruiken.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Nabespreking donderdag 12 juli (zie rooster).

Ten overvloede,  $Bit = \{0, 1\}$ . Voor een taal  $L$  over alfabet  $\Sigma$  en een string  $x \in \Sigma^*$  is de taal  $L$  **na**  $x = \{w \in \Sigma^* \mid xw \in L\}$ . Een taal  $L'$  heet een achtertaal van  $L$  als  $L' = L$  **na**  $x$  voor zekere string  $x$ .

**Opgave 1** (10 %). Beschouw een taal  $L$  over het alfabet  $\Sigma$ . Vul voor de puntjes (...) één van de volgende types automaten in:

A: een stapelautomaat.

B: een NFA $\epsilon$ .

C: een Turingmachine die altijd eindigt.

D: een lineair begrensde automaat.

E: een Turingmachine.

(a)  $L$  is beslisbaar  $\equiv L$  wordt geaccepteerd door ...

(b)  $L$  is contextvrij  $\equiv L$  wordt geaccepteerd door ...

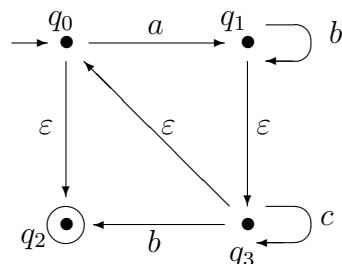
(c)  $L$  is regulier  $\equiv L$  wordt geaccepteerd door ...

(d)  $L$  is semi-beslisbaar  $\equiv L$  wordt geaccepteerd door ...

(e)  $L$  is contextgevoelig  $\equiv L$  wordt geaccepteerd door ...

(f) Zet deze vijf eigenschappen van talen in volgorde zodat de eerste eigenschap de tweede impliceert, de tweede de derde, enz.

**Opgave 2** (10 %). Beschouw over het alfabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  de nondeterministische eindige automaat  $M$  met  $\epsilon$ -overgangen met het toestandsdiagram:



Construeer volgens het standaardalgoritme de overgangstabel van een deterministische automaat  $M_d$  equivalent met  $M$ . Welke toestanden zijn accepterend en welke niet?

**Z.O.Z.**

**Opgave 3** (16 %). (a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.

De taal  $L_3$  over het alfabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  wordt gegeven door de grammatica:

$$S \rightarrow c \mid aS \mid Sa \mid bSa .$$

(b) Bepaal de taal  $L_3$  in verzamelingsnotatie (je kunt de telfuncties  $n_a$  en  $n_b$  gebruiken).

(c) Bewijs dat de taal  $L_3$  niet regulier is.

**Opgave 4** (10 %). Beschouw nogmaals de taal  $L_3$  uit de vorige opgave. Construeer een enkelvoudige stapelautomaat die de taal  $L_3$  accepteert. Het is voldoende het toestandsdiagram te geven en duidelijk te maken waarom deze stapelautomaat de taal  $L_3$  accepteert.

**Opgave 5** (10 %). Gegeven is de grammatica  $G$  over  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$  volgens

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aA \mid Aaa \mid CD \\ B &\rightarrow Bb \mid CcA \\ C &\rightarrow cC \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow dSd \mid \varepsilon . \end{aligned}$$

Bepaal volgens het standaardalgoritme een essentially noncontracting grammatica die equivalent is met  $G$ .

**Opgave 6** (8 %). (a) Het diktaat geeft een manier om een Turingmachine  $M$  te coderen als een string  $R(M)$  over *Bit*. Beschrijf deze coderingsfunctie  $R$ .

(b) Beschouw de taal  $L$  over *Bit* die bestaat uit alle strings  $R(M)w$  voor Turingmachines  $M$  en strings  $w \in \text{Bit}^*$ . Construeer het toestandsdiagram van een eenbands deterministische Turingmachine  $M$ , die voor elke invoer eindigt, die de taal  $L$  accepteert, en die bij een invoerstring  $R(M)w$  eindigt op het eerste symbool van  $w$  (of als  $w$  leeg is op de  $B$  daarachter).

**Opgave 7** (10 %). (a) Geef de definities van *beslisbare* en *semi-beslisbare* talen.

(b) Geef de definitie van Turing's Haltingtaal  $L_H$ .

(c) Is  $L_H$  beslisbaar? Is  $L_H$  semi-beslisbaar? (bewijzen zijn niet nodig).

(d) Bewijs dat elke semi-beslisbare taal  $L$  over *Bit* een achtertaal van  $L_H$  is.

**Opgave 8** (10 %). Laat  $L_1$  en  $L_2$  beslisbare talen zijn. Bewijs dat de concatenatie  $L_1L_2$  beslisbaar is.

**Opgave 9** (8 %). Laat  $L$  een semi-beslisbare taal over  $\Sigma$  zijn en  $x \in \Sigma^*$ . Bewijs dat de taal  $L$  **na**  $x$  semi-beslisbaar is.

**Opgave 10** (8 %). De taal  $L$  over het alfabet *Bit* is niet beslisbaar. Beschouw de taal

$$L' = \{11w \mid w \in L\} \cup \{0w \mid w \in \text{Bit}^* \wedge w \notin L\}.$$

Bewijs dat de taal  $L'$  niet semi-beslisbaar is.